EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES ELEMENTAIRES

EQUATIONS DU TYPE SIN X = A , COS X = A ET TAN X = A ($A \in \mathbb{R}$)

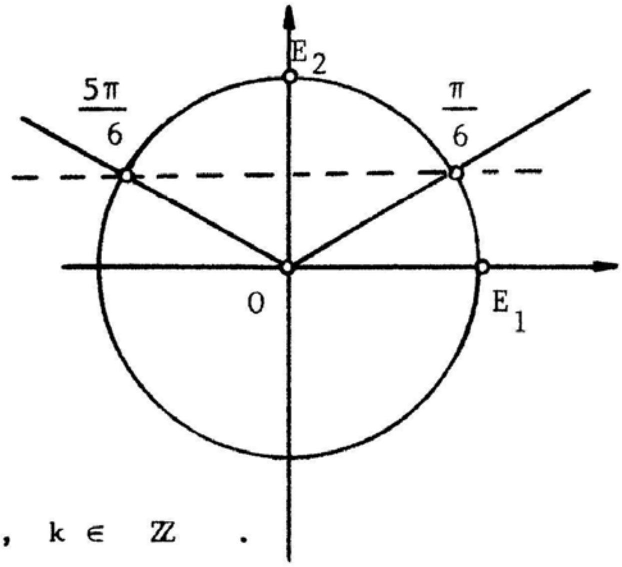
On utilise une calculatrice (par exemple) pour déterminer une solution de l'équation proposée.
On trouve ensuite les autres solutions en s'aidant d'un dessin.

Exemples :

(a) $\sin x = \frac{1}{2}$

$\sin x = \sin \frac{\pi}{6}$

($\frac{\pi}{6}$ est bien l'un des angles dont le sinus est $\frac{1}{2}$)



D'après le dessin, on a :

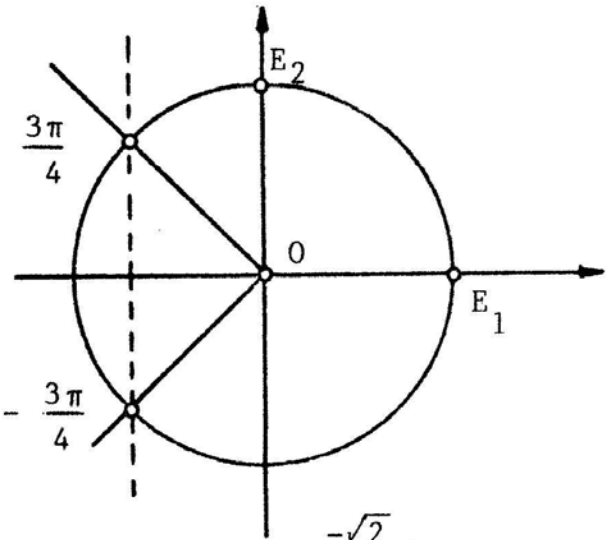
Premier cas : $x = \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Deuxième cas : $x = \underbrace{(\pi - \frac{\pi}{6})}_{\frac{5\pi}{6}} + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x = \cos \frac{3\pi}{4}$

($\frac{3\pi}{4}$ est bien l'un des angles dont le cosinus est $-\frac{\sqrt{2}}{2}$)



D'après le dessin, on a :

Premier cas : $x = \frac{3\pi}{4} + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Deuxième cas : $x = -\frac{3\pi}{4} + k\cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

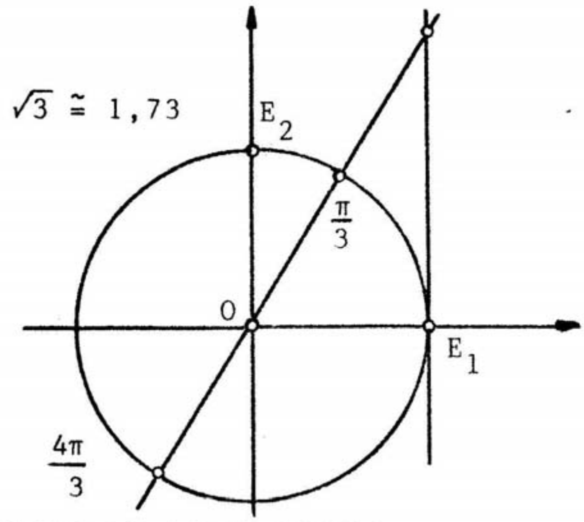
(c) $\tan x = \sqrt{3}$

$\tan x = \tan \frac{\pi}{3}$

($\frac{\pi}{3}$ est bien l'un des angles dont la tangente est $\sqrt{3}$)

D'après le dessin, on a :

$$x = \frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$



EXEMPLES DE RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DE TYPES DIVERS

(a) Résoudre l'équation : $\sin(2x) = \cos(3x)$.

On sait que : $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$.

L'équation proposée peut s'écrire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos(3x)$$

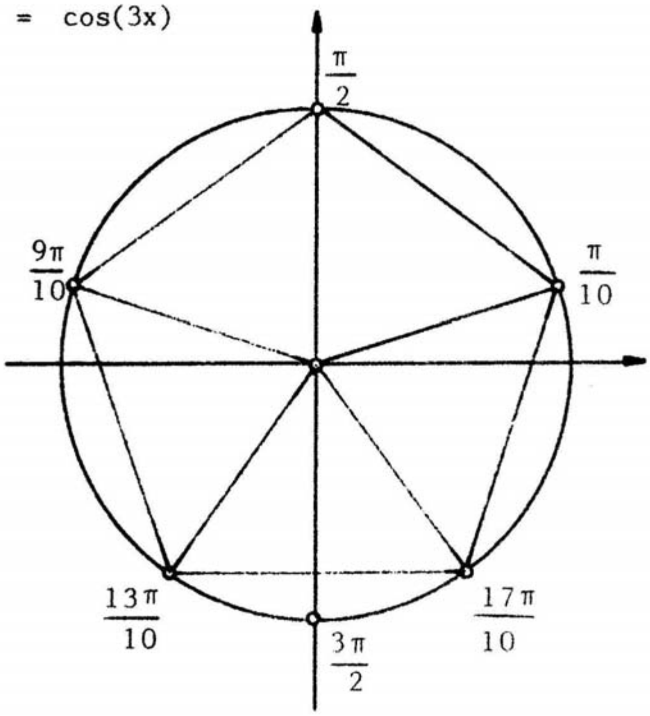
Premier cas :

$$\frac{\pi}{2} - 2x = 3x + k \cdot 2\pi$$

$$-5x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{10} + k \cdot \frac{2\pi}{5}$$

($k \in \mathbb{Z}$)



Deuxième cas :

$$\frac{\pi}{2} - 2x = -3x + k \cdot 2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z} \ .$$

L'ensemble des solutions est

$$\left\{ \frac{\pi}{10} + k \cdot \frac{2\pi}{5}, \ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \right\} .$$

Dans l'intervalle $[\ 0\ ,\ 2\pi\ [$, le sous-ensemble des solutions est $\left\{ \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{2}, \frac{9\pi}{10}, \frac{13\pi}{10}, \frac{3\pi}{2}, \frac{17\pi}{10} \right\}$.

(b) Résoudre l'équation : $2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$.

On pose $z = \cos x$ et l'équation proposée se ramène à une équation du deuxième degré :

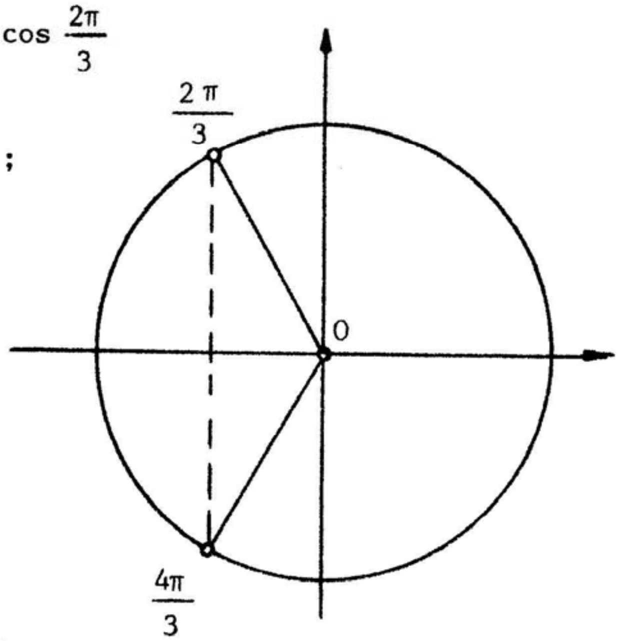
$$2z^2 - 5z - 3 = 0 \qquad\qquad 2\left(z + \frac{1}{2}\right)\cdot(z - 3) = 0 \ .$$

1°/ <u>Cas $z = -\frac{1}{2}$</u>

$\cos x = -\frac{1}{2} \iff \cos x = \cos\frac{2\pi}{3}$

<u>1er cas</u> : $x = \frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi$;

<u>2ème cas</u> : $x = -\frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi$



2°/ <u>Cas $z = 3$</u>

$\cos x = 3$

L'ensemble des solutions de cette équation est vide.

En résumé, l'ensemble des solutions est

$$\left\{ \frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi \ , \ k \in \mathbb{Z} \right\} \ .$$

Dans l'intervalle $[\, 0 \ , \ 2\pi \,[$, le sous-ensemble des solutions est $\left\{ \frac{2\pi}{3} \ , \ \frac{4\pi}{3} \right\}$.

(c) <u>Equations linéaires</u> (c'est-à-dire du premier degré en $\sin x$ et $\cos x$)

Résoudre l'équation $2\cos x + \sin x = -2$.

On associe à cette équation l'identité fondamentale

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \ .$$

Cela conduit à la résolution du système à deux inconnues, $\sin x$ et $\cos x$, suivant :

$$\begin{cases} 2\cos x + \sin x + 2 = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -2 - 2\cos x \\ \cos^2 x + (-2 - 2\cos x)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

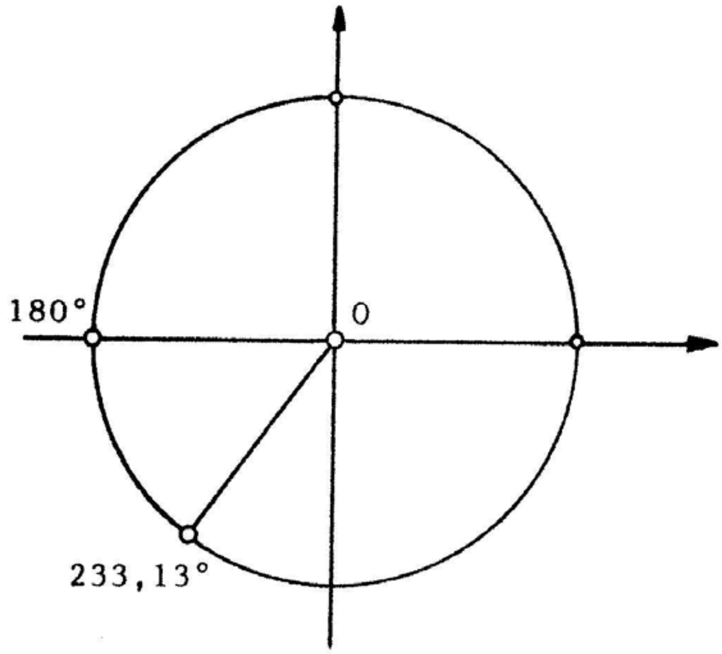
$$\begin{cases} \sin x = -2 - 2\cos x \\ \cos^2 x + 4 + 8\cos x + 4\cos^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin x = -2 - 2\cos x \\ 5\cos^2 x + 8\cos x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -2 - 2\cos x \\ 5(\cos x + 1)(\cos x + \frac{3}{5}) = 0 \end{cases}$$

Premier cas :

$$\begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x = 0 \end{cases}$$

$x = 180° + k\cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$.



Deuxième cas :

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{3}{5} \\ \sin x = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$x = 233{,}13° + k\cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$.

Remarques :

1) Dans le deuxième cas, la calculatrice ne donne pas directement la bonne solution.

2) On trouvera une autre méthode de résolution des équations linéaires au n° 7.5.

3) L'équation linéaire ci-dessus se présente lors de la recherche du vecteur unitaire de l'axe sur lequel le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a une projection algébrique égale à -2 .

d) <u>Equation homogène en $\sin x$ et $\cos x$</u>

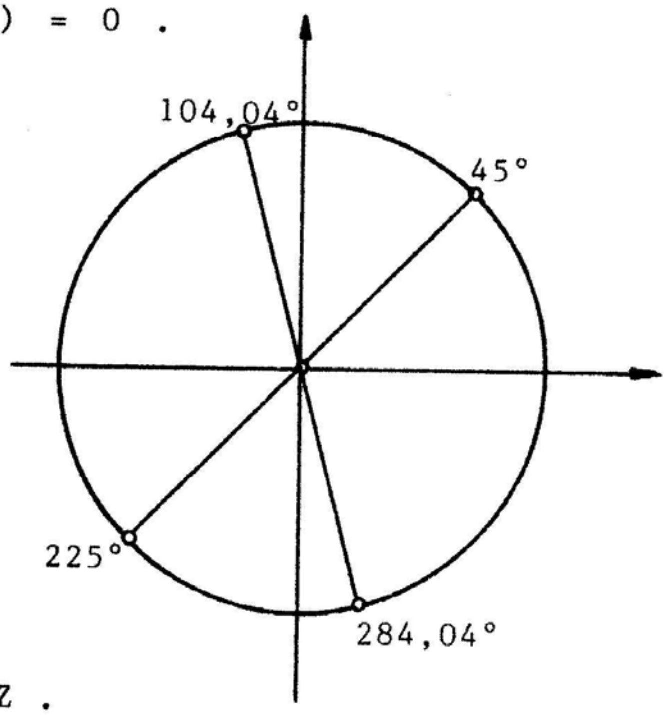
Résoudre l'équation

$$\sin^2 x + 35 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 0 .$$

Comme $\cos x = 0$ n'est pas solution de l'équation, on peut diviser les deux membres de celle-ci par $\cos^2 x$, ce qui donne :

$$\tan^2 x + 3 \tan x - 4 = 0 \quad , \text{ soit}$$

$$(\tan x - 1)\cdot(\tan x + 4) = 0 .$$



Premier cas :

$\tan x = 1$

$\tan x = \tan 45°$

$x = 45° + k\cdot 180° \ , \ k \in \mathbb{Z}$:

Deuxième cas :

$\tan x = -4$

$\tan x = \tan(-75{,}96°)$

$x = -75{,}96° + k\cdot 180° \ , \ k \in \mathbb{Z}$.

Remarque :

Une équation non homogène en $\sin x$ et $\cos x$ peut parfois être rendue homogène.

Par exemple : $3 \sin x \cos x = 4 - 5 \sin^2 x$ peut être rendue homogène en remplaçant 4 par

$$4 (\sin^2 x + \cos^2 x) .$$

En effet, l'équation

$$3 \sin x \cos x = 4 (\cos^2 x + \sin^2 x) - 5 \sin^2 x$$

est équivalente à

$$\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x = 0 .$$

EXERCICES

1) Pour chacune des équations proposées, représenter une solution sur le cercle trigonométrique. Déterminer ensuite cette solution au moyen d'un rapporteur puis donner toutes les autres solutions de cette équation.

a) $\sin x = 0{,}7$
b) $\sin x = -0{,}2$
c) $\cos x = 0{,}2$
d) $\cos x = -0{,}4$
e) $\tan x = 0{,}8$
f) $\tan x = -1{,}3$
g) $\sin x = 1{,}2$

2) Résoudre les équations suivantes :

a) $\cos x = 0{,}3242$

b) $\sin x = 0{,}9531$

c) $\tan x = -1{,}4$

d) $\cos x = -0{,}7$

e) $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\cos(4x) = -0{,}6$

g) $\sin(5x) = -0{,}6$

h) $\tan(3x) = -1$

i) $\cos(2x + \dfrac{\pi}{3}) = \cos(x - \dfrac{\pi}{2})$

j) $\sin(x - \dfrac{\pi}{4}) = \sin(\dfrac{x}{2})$

k) $\tan(3x) = \tan(4x)$

l) $\cos(2x-38°) = -0{,}65$

m) $\sin(x+37°) = 0{,}47$

n) $\tan(3x+78°) = 2{,}43$

3) Résoudre les équations suivantes :

a) $\sin x = \cos(3x + \dfrac{\pi}{3})$

b) $\tan(3x) = \cot x$

c) $\sin(x+207°) + \cos(2x-13°) = 0$

d) $\tan(3x-54°) + \cot(3x) = 0$

e) $4\sin^2 t + 4\sin t - 3 = 0$

f) $15\cos^2 t + 2\cos t - 8 = 0$

g) $\tan^2 t - 4\tan t + 3 = 0$

h) $4\cos^2 t - 2(1+\sqrt{2})\cos t + \sqrt{2} = 0$

i) $\cos^2 x - 4\sin x\cos x + 35\cos^2 x = 0$.

j) $\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$

k) $5\sin^2 x + 35\sin x\cos x - 4 = 0$

l) $2\sin^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2} + 5\sin x\cos x$

m) $2\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x - 3\cos^4 x = 0$

4) Résoudre les équations suivantes :

a) $2\cos x + 3\sin x = 1$

b) $3\cos x + 2\sin x = -3$

c) $2\cos x + 3\sin x = 3$

d) $\cos x + 2\sin x = 4$